2°) a)

- Pour $n=0$ $\quad u_1 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$

$$\frac{1}{2}(u_0 - 1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$$

Donc $\quad 0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 1)$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

et montrons que $0 < u_{n+2} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n+1} - 1)$

- $u_{n+2} - 1 - \left(\frac{1}{2}(u_{n+1} - 1)\right)$

$$= \frac{u_{n+1}^2 - u_{n+1} + 2}{1 + u_{n+1}} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1}^2 - u_{n+1} + 2 - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_{n+1}}{1 + u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + \frac{3}{2}}{1 + u_{n+1}}$$

$$= \frac{u_{n+1}^2 - 4u_{n+1} + 3}{2(1 + u_{n+1})}$$

$2(1+u_{n+1}) > 0$

$$= \frac{(u_{n+1} - 1)(u_{n+1} - 3)}{2(1 + u_{n+1})}$$

$u_{n+1} - 1 > 0$, $\quad u_{n+1} - 3 < 0$, $\quad$ donc le numérateur < 0